**8. Математическое ожидание**

**I. Математическое ожидание дискретных случайных величин**

**Определение.** Пусть дискретная случайная величина принимает значения с вероятностями . Математическим ожиданием называется

(предполагается, что ряд сходится абсолютно).

Рассмотрим примеры вычисления математического ожидания.

**Пример 8.1.** Рассмотрим случайную величину , соответствующую схеме Бернулли с параметрами и (см. параграф 7):

Формулу для математического ожидания биномиального распределения

преобразуем, используя равенство

тогда получаем,

**Пример 8.2.** Математическое ожидание геометрического распределения (см. параграф 7):

Сумма в скобках представляет собой производную от суммы геометрической прогрессии

откуда,

**Упражнение 8.1.** Показать, что математическое ожидание распределения Пуассона (см. параграф 7) равно *λ*.

Следует обратить внимание на статистическое толкование математического ожидания. Рассмотрим случайную величину , которая, в зависимости от выпавшего исхода некоторого статистического эксперимента, может принимать одно из двух значений, тем самым определены два случайных события: . Предположим, некто раз совершил испытание, соответствующее этому статистическому эксперименту, в результате раз наблюдалось событие и раза событие .

Предположим, значения имеют смысл выигрыша (прибыли), получаемой игроком в результате реализации соответствующего случайного события. Тогда средний выигрыш, приходящийся на одно наблюдение, равен суммарному выигрышу, деленному на число наблюдений,

В соответствии со статистическим пониманием вероятности, мы ожидаем, что при большом отношение будет близко к вероятности , а - к вероятности , таким образом, наблюдаемое среднее значение (выборочное среднее) будет близко к математическому ожиданию

Немного позже эти соображениям будет доставлен смысл точных математических теорем (закон больших чисел и центральная предельная теорема), пока же мы имеем в виду, что принятое в теории вероятностей определение математического ожидания вполне соответствует интуитивному пониманию среднего значения.

**Пример 8.3. Задача об анализе крови.** (Феллер I, задача 26, стр. 254). Необходимо выполнить анализ крови с целью обнаружения заболевания в группе из *N* человек. Если делать анализ крови каждого, то потребуется ровно *N* анализов. Если смешать кровь *k* человек и в этой группе не обнаружится реакции, то на *k* человек потребовался один анализ. Если же в этой группе попался хотя бы один инфицированный, то делается анализ всех, так что на группу потребовалось *k+*1 анализов. При таком плане исследования число выполненных анализов становится случайной величиной, необходимо найти ее среднее значение и определить его зависимость от размера группы *k*.

Обозначим вероятность положительной реакции в анализе отдельного человека, будем считать эту вероятность одинаковой для всех, а события обнаружения независимыми. Тогда вероятность обнаружения реакции в группе численностью *k* равна

Положим - число групп, тогда мы имеем случайную величину , соответствующую схеме Бернулли; значения равны числу групп, в которых была обнаружена реакция (. Вероятности этих значений определены формулой ( ) и в Примере 8.1. вычислено математическое ожидание

Обозначим число выполненных анализов: , тогда

На рисунке 8.2. показан график функции

при ; значение *k*, доставляющее минимум этой функции (обозначим его ) есть наилучший выбор размера группы.

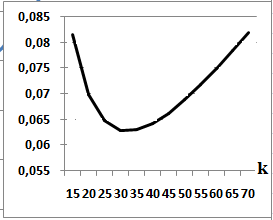


Рисунок 8.2.Выбор оптимального размера группы

В качестве показателя эффективности применения такого способа организации анализа крови естественно принять величину

показывающую, какую часть от полного числа анализов придется в среднем выполнить при анализе с оптимальным размером групп. Таблица 8.1. показывает некоторые результаты численных расчетов.

Таблица 8.1.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (%) |
| 0,01 | 12 | 80 |
| 0,001 | 34 | 90 |
| 0,0001 | 110 | 98 |

Эта методика действительно была внедрена во время Второй Мировой войны в США и позволила экономить до 80% расходов.

**II. Математическое ожидание непрерывных случайных величин**

**Определение.** Пусть абсолютно непрерывная случайная величина имеет плотность распределения . Математическим ожиданием называется

(предполагается, что этот интеграл существует).

**Пример 8.3.** Математическое ожидание равномерного распределения. Для равномерного распределения на интервале [*a,b*] (см. параграф 7)

**Пример 8.4.** Математическое ожидание экспоненциального распределения:

Интеграл вычисляем по формуле интегрирования по частям, , выбирая ; в полученном выражении первое слагаемое будет равно 0, останется интеграл , таким образом,

**Пример 8.5.** ”Геометрическая” интерпретация математического ожидания. Рассмотрим дискретную случайную величину, принимающую два значения:

Для нее ; если представить вероятности как массы, расположенные в точках , то будет центром масс этой системы. Особенно наглядно это при равных вероятностях, , тогда .

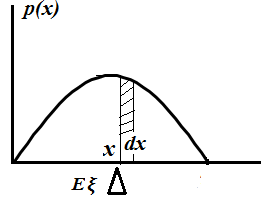


Рисунок 8.2. Математическое ожидание – центр тяжести

Для непрерывного распределения геометрия математического ожидания показана на рисунке 8.1. Заштрихованный столбик на графике плотности распределения - аналог ”массы” величиной если фигуру под графиком плотности представить равномерно распределенную по ней массу. Центр тяжести этой массивной фигуры получаем, просуммировав (проинтегрировав) и поделив на суммарную массу, равную , то есть, центр тяжести фигуры и есть математическое ожидание.

**Пример 8.6.** Построение распределения случайной величины и вычисление ее математического ожидания.

На радиус единичной окружности, проведенный вдоль оси абсцисс, бросается случайным образом точка ω и через нее проводится хорда, параллельная оси ординат. Построить распределение вероятностей для случайной величины, равной длине этой хорды, и найти для нее математическое ожидание.

Обозначим эту случайную величину ξ, тогда из рисунка следует

.

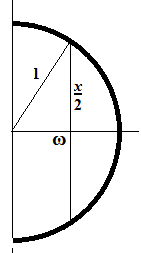


Рисунок 8.2. Длина хорды

Функция распределения этой случайной величины:

=;

при *x* < 0 и при *x* > 2.

Плотность распределения:

= , для ;

Математическое ожидание:

С помощью замены переменной этот интеграл преобразуется к виду

и это есть не что иное как бета-функция (см. ),

=